Allgemeine Formeln

Additionstheoreme:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=1/2\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=1/2\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot con\,\beta=1/2\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos^2\alpha=1/2\left[1+\cos 2\alpha\right]$$
$$\cos^3\alpha=1/4\left[3\cos\alpha+\cos 3\alpha\right]$$

Widerstandsanpassung:

$$Z_i=Z_a\rightarrow R_i=R_a,\quad X_i=X_a\rightarrow r=0$$

Leistungsanpassung:

$$Z_i=Z_a^*\rightarrow R_i=R_a,\quad X_i=-X_a\rightarrow r>0$$

Antenne

Grenze reaktiven Nahfeld, Nahfeld:

$$r_{nf}=\lambda$$

Grenze Nahfeld, Fernfeld:

$$r_{ff}=2\frac{D^2}{\lambda}$$

Wirkungsgrad:

$$\epsilon_{rad}=\frac{P_{rad}}{P_{\text{in}}}=\frac{P_{rad}}{P_{rad}+P_L}$$

Abgestrahlte Leistung:

$$P_{rad}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S_{av}\cdot r^2\sin\theta\,d\theta\,d\Phi$$

Mittlere Strahlungsdichte:

$$S_i=\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}$$

Richtcharakteristik:

$$c(\theta,\Phi)=\frac{E(\theta,\Phi)}{E_0}$$

Strahlungsdichte:

$$c^2(\theta,\Phi)=\frac{S(\theta,\Phi)}{S_0}$$

Richtfaktor:

$$D(\theta,\Phi)=\frac{S(\theta,\Phi)}{S_i(r)}=4\pi r^2\frac{S(\theta,\Phi)}{P_{rad}}=D_0c^2(\theta,\Phi)$$

$$D_0=4\pi r^2\frac{S_0}{P_{rad}}=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{S(\theta,\Phi)}{S_0}}_{c^2(\theta,\Phi)}\cdot\underbrace{\sin\Theta\,d\Theta\,d\Phi}_{d\Omega}}$$

Freiraumdämpfung:

$$D_f=\left(4\pi\frac{d}{\lambda}\right)^2\ oder\ a_f=10\cdot\log(D_f)\quad \text{in}[dB]$$

Wirkfläche:

$$A_e=\frac{\lambda^2}{4\pi}G_0=\frac{P_R}{S_i}\cos^2\psi_i=\frac{A_{em}}{D_0}G_0=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left|U_{ind}\right|^2R_{te}\cdot\cos^2\Psi_p}{S_i\cdot\left[\left(R_{rad}+R_L+R_{te}\right)^2+\left(X_A+X_{te}\right)^2\right]}$$
$$A_e=\frac{\lambda^2}{4\pi}\cdot G_0$$

Gewinn:

$$G=\epsilon_{rad}D(\theta,\Phi)$$

maximale Wirkfläche:

$$A_{em}=\frac{\left|U_{ind}^2\right|}{8\cdot S_i\cdot R_{rad}}=\eta_0\cdot\frac{\left|U_{ind}^2\right|}{4\cdot E_0^2\cdot R_{rad}}$$

Verhältnis (optimal): $\dfrac{A_e}{G_0}=\dfrac{A_{em}}{D_0}$

Verhältnis idealer Dipol: $\dfrac{A_{e,E}}{G_{0,E}}=\dfrac{A_{e,S}}{G_{0,S}}=\dfrac{\lambda^2}{4\pi}$

Rauchtemperatur: $T_A=\dfrac{\iint_\Omega T\,c^2(\Omega)\,d\Omega}{\iint_\Omega c^2(\Omega)\,d\Omega}$

Signalverzerrungen und Störungen

quadratische Verzerrung: $g(t)=a_1s(t)+a_2s^2(t)$

kubische Verzerrung: $g(t)=a_1s(t)+a_2s^3(t)$

Gesamtklirrfaktor: $k:=\sqrt{\dfrac{\sum_{n=2}^{\infty}\hat{g}_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty}\hat{g}_n^2}}$

Teilklirrfaktor: $k_n:=\dfrac{\hat{g}_n}{\hat{g}_1}$

Intermodulation

Stark Stöhrende Intermodulationsprodukte sind:

$2f_2-f_3$ und $2f_3-f_2$

Filtergewinn:

$$SNR_{mF}=SNR_{oF}+10\cdot\log\frac{B_n}{B}$$

mit $SNR_{oF}=10\cdot\log\dfrac{P_s}{N_0B_n}$

Rauschende Widerstände:

Rauschspannung:

$$U_n=\sqrt{4RkT\,\Delta f}$$
$$U_{n2}^2=4kT\int_{f_1}^{f_2}\Re\{Z\}\,df=4k\cdot T\cdot R\int_{f_1}^{f_2}|H(f)|^2\,df$$

Rauschleistung:

$$P_n=\frac{U_n^2}{4R}=kT\,\Delta f=kT\,H_0^2B_n$$

mit $H_0^2=max\left[H^2(f)\right]$

Äquivalente Rauschbandbreite:

$$B_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|H(f)|^2}{H_0^2}df$$

Thermisches Rauschen eine Reihenschaltung:

$$U_n^2=4k\cdot\Delta f\sum_{k=1}^{K}R_k\cdot T_k=4k\,\Delta f\cdot T_e\sum_{k=1}^{K}R_k$$

Thermisches Rauschen einer Parallelschaltung:

$$I_n^2=4k\Delta\frac{f\cdot\sum_{K=1}^{K}T_k}{R_k}=4k\Delta f\cdot T_e\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{R_k}$$

Reihenschaltung: Parallelschaltung

$$T_e=\frac{\sum_{k=1}^{K}R_kT_k}{\sum_{k=1}^{K}R_k} \qquad T_e=\frac{\sum_{k=1}^{K}\frac{R_k}{T_k}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{R_k}}$$

Rauschende Leitungen

Ausgang: $T_e=T_{phys}\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)$

Eingang: $T_e=T_{phys}\cdot(a-1)$

Rauschzahl: $F=a$ für $T_0=T_{phys}$

Rauschende Zweitore

Systemrauschleistung: $P_{n3}=g_{p1}g_{p2}kB_nT_S$

Systemrauschtemperatur am Eingang:

$$T_S=T_A+\underbrace{T_{i1}+\frac{T_{i2}}{g_{p1}}}_{T_{tot}=T_0(F_{tot}-1)}+\dots+\frac{T_{iK}}{\prod_{k=1}^{K-1}g_{pk}}$$

mit $T_{i1,2,\dots}=\frac{T_{ni1,2,\dots}}{g_{p1,2,\dots}}$

Rauschzahl:

$$F=\frac{P_{s1}/P_{n1}}{P_{s2}/P_{n2}}=1+\frac{T_i}{T_0} \quad \text{mit } T_0=\left\{\begin{array}{l}293\,K\text{ in Japan}\\290\,K\text{ in EU/USA}\end{array}\right\}$$

Systemrauschzahl:

$$F_{tot}=F_1+\frac{F_2-1}{g_{p1}}=F_1+\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{F_n-1}{\prod_{k=1}^{n-1}g_{pk}}\right]$$

Informationsgehalt und Kanalkapazität

Informationsgehalt: $I=ld\frac{1}{P(x_i)}$ in bit

Shannon'sche Formel (Entropie):

$$H=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot I_i=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot ld\frac{1}{p(x_i)}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\cdot ld\,p(x_i)$$

Nachrichten- oder Entscheidungsgehalt (gleiche Warscheinlichkeit):

$H_0=H_{max}=ld\,n$

Redundanz:

$R=H_0-H$

Informationsgehalt eines Ereignispaares:

$I(x_i,y_j)=-ld\,p(x_i,y_j)$

Verbundentropie:

$H(x,y)=-\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\cdot ld\,p(x_i,y_j)$

Aquivokation:

$H(x|y)=H(x,y)-H(y)=$

$=\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\cdot\ln p(x_i,y_j)-\left(-\sum_j p(y_j)\cdot\ln p(y_j)\right)$

Irrelevanz:

$H(y|x)=H(x,y)-H(x)=$

$=\sum_i\sum_j p(x_i,y_j)\cdot\ln p(x_i,y_j)-\left(-\sum_j p(x_i)\cdot\ln p(x_i)\right)$

Transinformation:

$H(x\to x)=H(x)-H(x|y)=H(y)-H(y|x)$

mittlere Nachrichtendauer: mitlere Symbolrate:

$T=\bar{T}_i=\sum_{i=1}^{n}p(x_i)T_i \qquad F=1/T$

Informationsfluss:

$\Phi=\frac{H}{T}$ in bit/s oder $Symbol/s$

Nachrichtenfluss:

$\Phi_N=\frac{H_0}{T}=F\cdot H_0$

Transinformationsfluss:

$$\Phi_Y=H\frac{(x\to y)}{T}=\frac{H(x)+H(y)-H(x,y)}{T}$$

Kanalkapazität: $C=max\{\Phi_Y\}$

Informationsmenge:

$$I=CT_C=B_CT_CD_C=B_CT_C\,ld\left(1+\frac{P_s}{P_n}\right)$$

Kanalkapazität:

$$C=B_C\,ld\left(1+\frac{P_s}{P_n}\right)=B_C\cdot ld\left(1+\frac{P_s}{N_0\cdot B_C}\right)=$$

$$=\frac{B_C}{3}\cdot\underbrace{SNR}_{\text{in }dB} \quad \text{in } bit/s$$

Maximalkapazität: $C_{max}\approx\frac{1{,}44\cdot P_s}{N_0}$

Signalübertragung

Reflektionsfaktor: $\underline{r}=\frac{\underline{Z}_a-\underline{Z}_i}{\underline{Z}_a+\underline{Z}_i}$

Rückflussdämpfung:

$$a=20\,lg\frac{1}{r}=20\,lg\left(\left|\frac{\underline{Z}_a+\underline{Z}_i}{\underline{Z}_a-\underline{Z}_i}\right|\right)$$

Anpassungsfaktor: $m=\frac{1-|r|}{1+|r|}$

Welligkeitsfaktor: $s=\frac{1}{m}$

Pre- und Deempase: $H_D(f)=\frac{1}{H_P(f)}$

Störleistung ohne/mit Pre- und Deemphase:

$$P_{n,oP}=\int_{f_L}^{f_H}N(f)\,df$$

$$P_{n,mP}=\int_{f_L}^{f_H}N(f)|H_D(f)|^2\,df=N_0\cdot B$$

Mischung:

AM-Signal:

$$u_{AM}(t)=a\cdot\hat{u}_c\cdot\cos(\omega_c t)+b\cdot\frac{1}{2}\hat{u}_s\cdot\cos[(\omega_c-\omega_s)t]+$$
$$+b\cdot\frac{1}{2}\hat{u}_s\cdot\cos[(\omega_c+\omega_s)t]$$

Gleichlagenabwärtsmischung:

$f_{IF}=f_{RF}-f_c$ für $f_{RF}>f_c$

Kehrlagenabwärtsmischung:

$f_{IF}=f_c-f_{RF}$ für $f_{RF}<f_c$

Spiegelfrequenzunterdrückung:

$B_{RF}\leq 2 f_{IF}$

Pulscodemodulation

Verlauf:

Abtastung – Quantisierung – Codierung

Auflösungsvermögen: $\Delta s=\frac{\Delta x}{N}$ mit $N=2^n$

Dynamik: $D=20\cdot\log\frac{\Delta x}{\Delta s}$

Quantisierungsrauschleistung: $P_q=\frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta s^2}{12}$

Quantisierungsrauschabstand:

$$SNR_q=10\cdot\log\frac{P_s}{P_q}=10\cdot\log\frac{12\,R\,P_s}{\Delta s^2}$$

Nichtlineare Quantisierung (Kompressionskennlinie):

A-Gesetz (EU):

$$y=sgn(x)\frac{a|x|}{1+\ln A}\quad \text{mit } A=87{,}6$$

µ-Gesetz (USA):

$$y=sgn(x)\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}\quad \text{mit } \mu=255$$

erforderliche Bandbreite für NRZ-Signale:

$$B\geq f_{Ny}=\frac{1}{2T_b}=\frac{R_b}{2}$$

Bitrate: $R_b=n\cdot f_p$

Signalenergie, unipolar: $E_b=\frac{1}{2}\frac{A^2 T_b}{R}$

Signalenergie, bipolar: $E_b=\frac{A^2 T_b}{R}$

Bitfehlerrate unipolar:

$$BER=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{P_s}{4P_n}}\right)=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

Bitfehlerrate bipolar:

$$BER=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{P_s}{2P_n}}\right)=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Nynquist: $f_p\geq 2 f_b$

Fehlerwarscheinlichkeit (PCM -Codewort):

$p_w=1-(1-p_b)^n$ mit n Bits

PCM-Zeitmultiplex

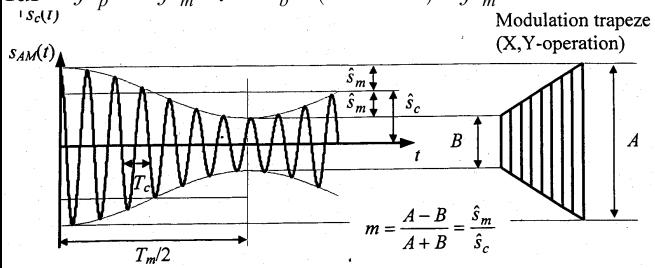
Bitrate:

ohne berücks. der Rahmensyn.bits:

$R_b=n\cdot K\,f_p$ mit K Anzahl der Kanäle

mit s Syn.bits pro Rahmen: $R_b=(n\cdot K+s)f_p$

für $f_p=2f_m$: $R_b=(n\cdot K+s)\,2f_m$



$$s_{AM}(t)=\hat{s}_c[\cos\omega_c t+\frac{m}{2}\cos(\omega_c-\omega_s)t+$$
$$+\frac{m}{2}\cos(\omega_c+\omega_s)t]$$

$$P_{AM}=\frac{\hat{s}_c^2}{2R}\cdot\left[1+\frac{m^2}{2}\right]$$

Modulationsgewinn:

$G_m=SNR_{Channel}-SNR_{Demod}$

Digitale Modulation

Spektrale Effizienz: $\epsilon_s=\eta=\frac{R_b}{B_{RF}}$

Minimale Bandbreite:

$$B_{min,n}=\frac{1}{2T_s}=\frac{1}{2mT_b}=\frac{R_b}{2m}=\frac{B_{min,2}}{m}$$

Raised-cosine-Filter

Roll-off-Faktor: $0\leq r\leq 1$

$r=0\rightarrow$ ISI größer ; $r=1\rightarrow$ ISI gering

Übertragungsfunktion:

$$|H_{rc}(f)|=\begin{cases}1 & \text{für } 0\leq|f|\leq(1-r)f_{Ny}\\ \cos^2\left[\frac{\pi}{4r}\left(\frac{f}{f_{Ny}}-(1-r)\right)\right] & \text{für } (1-r)f_{Ny}<|f|\leq(1+r)f_{Ny}\\ 0 & \text{für } (1+r)f_{Ny}<|f|\end{cases}$$

Bandbreite: $B_{rc}=\frac{1+r}{2T_s}$

Mached Filter: $B_{RF}=\frac{1+r}{T_s}$

für M-PSK oder M-ASK ($\sqrt{rc}$-Filter):

$$B_{RF}=2f_{Ny}(1+r)=2\cdot\frac{1}{2T_s}(1+r)=\frac{1}{mT_b}(1+r)=$$
$$=\frac{R_b}{m}(1+r)$$

Maximal verfügbare Rauschleistung nach $\sqrt{rc}$-Filter :

$$P_{n,av}=kTH_0^2\underbrace{\int_0^\infty\left|\frac{H_R(f)}{H_0}\right|^2 df}_{B_n}=kT\frac{H_0^2}{2T_s}$$

Äquivalente Rauschbandbreite:

$$B_n=\int_0^\infty\left|\frac{H_R(f)}{H_0}\right|^2 df=\int_0^\infty|H_{rc}(f)|^2 df=\frac{1}{2T_s}=\frac{1}{2mT_b}$$

Matched Filter Bedingung:

Transmitter: $B_{BPF,T}>2B_{LPF,T}$

Reciever: $B_{BPF,R}>2B_{LPF,R}$

Impulsantwort: $h_{R,opt}(t)=H_C\cdot s(iT-t)$

Binäre Umtastung

Raylights Energietheotem:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df$$

Dirac-Impulsfolge:

$$s_d(t)=\sum_{i=-I}^{I} d(i)\cdot A_m T_b\cdot\delta(t-iT_b)$$

NRZ-Signal:

$$s_m(t)=A_m\sum_{i=-I}^{I} d(i)\cdot rect\left(\frac{t-iT_b}{T_b}\right)$$

Bitfehlerhäufigkeit:

$$BER_{mod}=\frac{1}{2}erfc\left(\frac{A_{th}-A_0}{\sqrt{2\sigma_n^2}}\right)=\frac{1}{2}erfc\left(\frac{d_e/2}{\sqrt{2\sigma_n^2}}\right)$$

Symbolfehlerhäufigkeit (QPSK):

$$SER_{QPSK}=erfc\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)-\frac{1}{4}erfc^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

Fouriertransformation

$$h_T(t)=\frac{1}{T_b}rect\left(\frac{t}{T_b}\right)=\begin{cases}\frac{1}{T_b} & \text{für}-T_b/2\le t\le T_b/2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$\downarrow$

$$H_T(f)=si(\pi\cdot f\cdot T_b)$$

$$s(t)=\left[1-\frac{|t|}{T}\right]rect\left(\frac{t}{2T}\right)\Leftrightarrow S(f)=T\,si^2\left(t\frac{\omega}{2}\right)$$

$$s_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(t-nT)=s(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$\downarrow$

$$S_p(f)=S\frac{(f)\cdot 1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)\quad\text{mit } f_0=\frac{1}{T}$$

$$s(t)=A\cdot si(\pi 2f_m t)$$

$\downarrow$

$$S(f)=\frac{A}{2f_m}\cdot rect\left(\frac{f}{2}f_m\right)$$

$$s(t-t_0)\quad\Leftrightarrow\quad S(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$s(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\quad\Leftrightarrow\quad S(f-f_0)$$

$$d^n s\frac{(t)}{dt^n}\quad\Leftrightarrow\quad(j2\pi f)^n S(f)$$

$$s_1(t)*s_2(t)\quad\Leftrightarrow\quad S_1(f)\cdot S_2(f)$$

Codierungstheorie

Wortumfang (n-lange Wörter): $wr_{max}=sr^n$

absolute Coderedundanz:

$$R_{code}=ld(wr_{c,max})-ld(wr_c)$$

relativer Coderedundanz: $r_{code}=\frac{R_{code}}{ld(wr_{c,max})}$

relative Coderate:

$$v_{code}=1-r_{code}$$

Distanz eines Codes:

$d=min\{h\}$ h Anzahl der Veränderungen zw. 2 Codewörtern

Mindestens erkennbare fehlerhafte Symbole:

$$e=d-1$$

korrigierbare fehlerhafte Wörter:

ungerade Distanz: $t=\frac{d-1}{2}$

gerade Distanz: $t=\frac{d}{2}-1$

Blockcodes:

alle Codewörter gleich lang

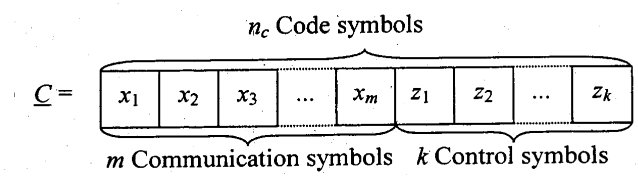
Wortumfang: $wr_{c,max}=sr_c^{n_c}$

Redudanzfreier Blockcode:

$wr_s=wr_c=wr_{c,max}$ oder $sr_s^{n_s}=sr_c^{n_c}$

Anzahl der Kontrollsymbole:

$$k=n_c-m$$



Codrate von (n,m)-Code: $CR=\frac{m}{n}$

Verkettete Codes:

Gesamtdatenrate: $R_d=\frac{CR_1}{CR_1\cdot CR_2}$