Elektrostatische Feld

Berechnungsreihenfolge

$Q \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow U \rightarrow C = \frac{Q}{U}$

Gauß'scher Satz

$Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$

Elektrische Verschiebungsdichte:

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

Elementarladung: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C,\; m_e = 9{,}1095 \cdot 10^{-31}\,kg$

Gravitationskonstante: $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Maxwellbeziehung: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c_0^2 = 1$

Elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = \frac{\pi \cdot 10^{-9}}{36} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$

Lichtgeschwindigkeit: $c_0 = 299792458 \frac{m}{s} \approx 300 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$

Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$

Euler'sche Zahl: $e = 2{,}718...$

Elektrisches Potential

Potentiale:

$U_{AB} = \Phi(A) - \Phi(B) = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Wirbelfreiheit des E-Feldes:

$\oint_{\text{geschlossene Linie}} \vec{E} d\vec{s} = 0$

Arbeit durch Ladungsverschiebung im E-Feld

$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q \cdot \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \cdot U_{AB}$

unabhängig vom Weg zwischen A und B

Zusammenhang E-Feld und Potential:

$\vec{E} = -grad\Phi$ bzw. $-d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Potential (Punktladung): $\phi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}$

Potential (Linienladung): $\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \ln \frac{\rho_B}{\rho}$

Ladungsverteilungen

Linienladungsdichte: $\lambda = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow Q = \int \lambda \cdot ds$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow Q = \int \sigma \cdot dA$

Raumladungsdichte: $\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow Q = \int \rho \cdot dV$

Kraft im elektrostatischen Feld

Elektrische Kraft auf Q:

$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}_{fremd}$

virtuelle Verschiebung $(Q = const)$

$dW_{ges} = d(W_e + W_m) = 0 \Rightarrow F_x = -\frac{dW_e^{(Q)}}{dx}$

Kräfteberechnung:

$W_e^{(Q)} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}; C_{pl} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d - x}$

$\Rightarrow F = -\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{Q^2 \cdot (d-x)}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \right) = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot A}$

virtuelle Verschiebung $(U = const)$

$dW_{ges} = d(W_e + W_m + W_B) = 0 \Rightarrow F = \frac{dW_e^{(U)}}{dx}$

Kräfteberechnung:

$W_e^{(U)} = \frac{C \cdot U^2}{2}; C_{pl} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d - x} \Rightarrow F = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot A}{2 \cdot (d-x)} \right) = \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot A}{2 \cdot d^2}$

$F_x = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2 A = \frac{1}{2} \frac{D^2 A}{\varepsilon} = \frac{1}{2} DEA$

Kraftdichte: $\sigma = \frac{F_x}{A} \equiv w_e$

Kraft zwischen zwei Punktladungen

Coulomb'sches Gesetz:

$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$

Kraft zwischen zwei Linienladungen

$d\vec{F} = dQ \cdot \vec{E}_{fremd}$, $dQ = \lambda_1 \cdot dl$, $\vec{E}_{fremd} = \frac{\lambda_2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot d} \cdot \vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot d} \cdot \vec{e}_r$

Energie im elektrostatischen Feld

elektrische Energiedichte:

$w_e = \frac{dW}{dV} = \int_0^D \frac{D}{\varepsilon} dD \overset{\varepsilon = const}{\rightarrow} w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2$

gespeicherte Energie: $W = \int_V w_e \cdot dV$

$W = \int_0^t u(t) \cdot i(t) \cdot dt \qquad i(t) = \frac{dQ}{dt}; u = E \cdot d; dQ = A \cdot dD$

$\Rightarrow W = A \cdot d \cdot \int_0^D E \cdot dD = V \cdot \int_0^D E \cdot dD = V \cdot \int_0^D \frac{D}{\varepsilon} \cdot dD$

für Kondensator:

$W = \int_0^t u(t) \cdot i(t) \cdot dt \qquad i(t) = \frac{dQ}{dt}; dQ = C \cdot dU$

$\Rightarrow W = C \cdot \int_0^U u \cdot dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$

Bei Umladevorgängen zwischen Kondensatoren bleibt die Ladung erhalten, nicht jedoch die Energie.

Gravitationsgesetz

$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{m_{Q_1} \cdot m_{Q_2}}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

Elektrische Feldstärke

einer Punktladung Q: $\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$

einer Linienladung $\lambda \cdot l$**:** $\vec{E} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\rho$

Feldstärkenabschätzung

für scharfe Kanten, kleine Radien:

$\vec{E} = \frac{U}{r} \cdot \vec{e}_r \qquad E_{\max} = \frac{U}{r_{\min}} \approx 30 \frac{kV}{cm}$

Der Kondensator

Berechnung der Kapazität:

$Q \Rightarrow \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U \rightarrow C = \frac{Q}{U}$

Kapazität: $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Phi(1) - \Phi(2)}$

idealer Plattenkondensator:

$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \frac{Q}{2 \cdot \vec{A}} + \frac{Q}{2\vec{A}} = \frac{Q}{\vec{A}}$

Kapazität:

$C = \frac{\varepsilon A}{d}$

Zylinderkondensator: $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(\rho_2 / \rho_1)}$

geschichtet: $U = U_{\rho_1 \rho_2} + U_{\rho_2 \rho_3}$

Kugelkondensator: $C = \frac{4\pi\varepsilon}{(1/r_1 - 1/r_2)}$

Parallelschaltung: $C_{ges} = C_1 + C_2$

$Q_{ges} = \sum Q$

Reihenschaltung: $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

$Q_{ges} = Q_1 = Q_2 = ...$

Ladevorgang: $u_c(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \qquad i_c(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Entladevorgang: $u_c(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad i_c = -\frac{U}{R} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$

$\boxed{\tau = R \cdot C}$

Kästchenmethode (Kapazitätsabschätzung)

$C' = \frac{\varepsilon \cdot b}{d} \Rightarrow C' = \varepsilon \cdot \frac{n}{m-1}$

n: Anzahl der Feldlinien

m: Anzahl der Äquipotentiallinien incl. Elektroden

Grenzflächen

Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

$E_{2t} = E_{1t}$

$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$

wenn $\sigma = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{D_{2t}}{D_{1t}}$$

Quergeschichtet: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \cdot \frac{D_1}{D_2} = 1$

Längsgeschichtet: $\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cdot \frac{E_1}{E_2} = 1$

elektrische Kraft auf eine Grenzfläche

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\left[\int_A \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)\sigma \cdot dA + \int_A \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{D}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2\right) \cdot d\vec{A}\right]$$

Parallele Linienladungen

Linienladungen als Bündel:

- ✓ Potentialfunktion für einen Punkt aufstellen. Die Potentiale werden superpositioniert.

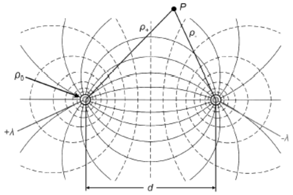
$$\varphi_P = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln\frac{1}{\rho_k} \qquad \varphi_P = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln\frac{\rho_-}{\rho_+} + K$$

- ✓ Dann den Punkt P auf eine der Linienladung legen (auf Außenradius). Den Punkt auf verschiedene Linienladungen legen, bis alle Unbekannten bestimmt werden können. Dann Gleichungssystem lösen.
- ✓ Zur Berechnung der Kapazität des Leitungsbündels über die Linienladungsdichte und Potentiladifferenz. Dabei fallen die Integrationskonstanten heraus.

$$C' = \frac{\lambda}{\varphi_+ - \varphi_-} \qquad C' = \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\ln\frac{d}{\rho_0}}$$

- ✓ Feldstärkenbestimmung über die Kapazität und Spannung.

$$E = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \rho_0} = \frac{C' \cdot U}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \rho_0} \qquad E = \frac{U}{2 \cdot \rho \cdot \ln\frac{d}{\rho_0}}$$



Elektrisches Strömungsfeld

Berechnungsreihenfolge

$I \Rightarrow \vec{J} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U \rightarrow R = \frac{U}{I}$

Elektrostatisch oder Strömungsfeld?

Relaxationszeitkonstante: $\tau_e = \frac{\varepsilon}{\gamma} = R \cdot C$

$\frac{T}{4} << \tau_e \Rightarrow$ **elektro(quasi)statisch**

$\frac{T}{4} >> \tau_e \Rightarrow$ **Strömungsfeld**

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U} \qquad R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{U}{\gamma \cdot \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Stationäres Strömungsfeld

Homogenes Strömungsfeld: $\vec{J} = const$

Stationäres Strömungsfeld: es gelten die Kirchhoffschen Regeln

Strom: $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad I = \frac{dQ}{dt}$

Spannung: $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Kirchhoffsche Knotengleichung: $\oint_{A_h} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$

Kirchhoffsche Maschengleichung: $\oint_{c_g} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

Widerstand im Strömungsfeld

Leitfähigkeit : $\gamma = \frac{1}{\rho}$

Widerstand: $R = \frac{U}{I} = \frac{\phi_+ - \phi_-}{I} = \frac{\varepsilon}{\gamma \cdot C}$

$\partial R = \rho \frac{\partial l}{A} \qquad \partial G = \gamma \frac{\partial A}{l}$

Ohmsches Gesetz: $\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} \qquad \vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}$, $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$

Ladungen im elektrostatischen Feld

Feldkraft: $\vec{F} = Q\vec{E}$

Newtonsches Axiom: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Potentielle Energie:

$$\Delta W_{pot} = Q \cdot \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q\left(\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)\right)$$

Kinetische Energie: $W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (v << c)$

Energieerhaltungssatz:

$$W_{pot}(\vec{r}_1) + W_{kin}(\vec{r}_1) = W_{pot}(\vec{r}_2) + W_{kin}(\vec{r}_2)$$

Leistung im Strömungsfeld

Elektrische Leistungsdichte: $p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma \cdot E^2$

Elektrische Leistung: $P = \int_V p \cdot dV = \int_V \vec{J}\vec{E} \cdot dV$

Leistung allgemein: $P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$

Geschwindigkeit von Elektronen im Strömungsfeld

$v = \frac{J}{N_e \cdot q} = \frac{J}{\rho}$

Bedingungen an Grenzflächen

$\oint_{A_h} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n}$

$\oint_{c_g} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}$$

Stationäres Magnetfeld

Berechnungsreihenfolge

$\phi \Rightarrow B \Rightarrow H$

Magnetischer Fluß

$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad \phi \overset{entspricht}{\Leftrightarrow} I$

für die Hüllfläche O eines geschlossenen Raumes:

$\oint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

magnetische Flussdichte: $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt}\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

für stationäres Feld, ruhende Anordnung:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \sum I = \Theta$$

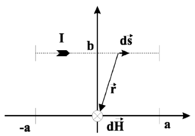
Weg C ist mit Vektor A in Rechtsschraube verknüpft.

Die Formel von Biot-Savart

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}^{\,0}}{|r|^2}$$

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|r|^3}$$

$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{n} \times \vec{r}^{\,0}}{|r|^2} ds$ **, mit** $\vec{n}$ Einheitsvektor in Richtung von i



Magnetfeld eines regelmäßigen n-Ecks:

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_3 \frac{\mu \cdot n \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

Kreis: $\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \pi; r = a$

Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

Kraft im

- **elektrischen Feld:** $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$
- **magnetischen Feld:** $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$
- **B- und E-Feld:** $\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Kraft auf einen Linienleiter (Länge Δs **):** $\Delta\vec{F} = I \cdot (\Delta\vec{s} \times \vec{B})$, i und Δs gleichgerichtet

B-Feld eines Linienleiters: $\vec{B} = \mu \frac{i}{2\pi\rho} \cdot \vec{e}_\varphi$

Kraft zwischen zwei parallelen Linienleitern der Länge Δs **:**

$\vec{F} = \mu \frac{i_1 \cdot i_2 \cdot \Delta s}{2 \cdot \pi \cdot \rho} \cdot \vec{e}_r$, $\quad i_1 i_2$ gleichgerichtet ziehen sie sich an

Magnetischer Kreis

Durchflutung: $\Theta = iN$

Rechenregeln für magnetische Kreise:

Durchflutungsgesetz: $I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum \pm \Theta_k$

Knotenregel: $\sum \pm \phi_j = 0$

Magnetische Spannung (allg.): $V_m = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{s}$ $\quad V_m = \Theta \overset{entspricht}{\Leftrightarrow} U$

Formeln zur Berechnung magnetischer Kreise

Alle mit ν gekennzeichneten Größen sind Mittelwerte

Magnetische Spannung: $V_\nu = H_\nu \cdot l_\nu$

Magnetischer Fluss: $\phi_\nu = B_\nu \cdot A_\nu$

Kraft im Luftspalt: $\vec{F}_L = \frac{B_L^2 \cdot A_L}{2 \cdot \mu_0} \cdot \vec{e}_r$

Wenn $\vec{B} = \mu \vec{H}$ gilt das Ohmsche Gesetz: **magnetischer Widerstand:** $R_{m\nu} = \pm \frac{V_\nu}{\phi_\nu} = \frac{l_\nu}{\mu_\nu A_\nu}$

Magnetischer Leitwert: $\Lambda_\nu = \frac{1}{R_{m\nu}}$

Netzwerkanalyse

Knoten: $B_1 A_1 + ... = 0$

Maschen: $H_1 l_1 + ... = NI$ oder $\phi_1 R_{m1} + ... = NI$

$$\phi_1 = \frac{N_1 I_1}{R_{m1} + R_{m2} \| R_{m3}}$$

Selbstinduktivität:

$$L = N^2 \Lambda \quad M = N_1 \frac{\phi_1}{i_2}\Big|_{i_1=0} = \frac{N_1}{i_2} \phi_2\Big|_{i_1=0} \cdot \frac{\phi_1}{\phi_2}\Big|_{i_1=0}$$

Lineare Interpolation:

$$H_x = \left(H_{x-1} + \frac{B_x - B_{x-1}}{B_{x+1} - B_{x-1}} \left(H_{x+1} - H_{x-1} \right) \right)$$

Bedingungen an Grenzflächen

$H_{1t} = H_{2t}$ $\quad B_{1n} = B_{2n}$ $\quad \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$ $\quad$ **überall:** $J = 0$

Zeitlich veränderliche Magnetfelder

Elektrische Umlaufspannung

$$\overset{\circ}{u} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Induktionsgesetz:

$$\overset{\circ}{u} = -\frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \cdot \sum_{k=1}^{n} \phi_k = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

1. und 2. Maxwell-Gleichung (Induktionsgesetz)

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$U = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

für bewegte Systeme

$$\overset{\circ}{U}' = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \cdot \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \oint_C \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{s}$$

gestrichene Variablen sind im Ruhesystem
v ist die Geschwindigkeit des Ruhesystems

Energie des Magnetfelds

μ ist abhängig von $\vec{B}$:

Energiedichte: $w_m = \int_0^{B_0} \vec{H} \cdot d\vec{B}$

Energie $W_m = \int_V w_m \cdot dV$

μ ist konstant:

Energiedichte: $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$

Energie:

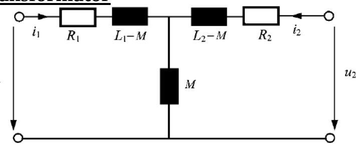
$$W_m = \int_0^\infty u_L(t) \cdot i_L(t) = \int_0^I L \cdot i_L \cdot di_L = \int_V w_m \cdot dV = \frac{1}{2} L I^2$$

Energie bei magnetisch gekoppelten Systemen:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M \cdot I_1 I_2 + \frac{1}{2} L I_2^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} L_{uv} \cdot I_u \cdot I_v$$

Transformator



$$\phi_{11} = L_{11} \cdot i_1;\ \phi_{12} = M \cdot i_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + \frac{d\phi_1}{dt} = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + (L_1 - M) \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 + (L_2 - M) \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}$$

Lorenzkraft

$$\vec{F}_L = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \overset{\vec{v} \perp \vec{B}}{\rightarrow} F_L = Q \cdot v \cdot B$$

Kraft in einer Leiterschleife

$$F_x = \frac{dW_m}{dx};\ dW_m = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot dL \Rightarrow F_x = \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot \frac{dL}{dx}$$

Kraft pro Fläche:

$$\frac{F_x}{A} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} = \frac{\mu_0 \cdot H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2}$$

Selbst- und Gegeninduktivität

Magnetischer Fluss um einen Leiter:

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu \cdot I \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu \cdot I \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Ideale Spule: $u_L = L \frac{di_L}{dt}$

Selbstinduktivität: $L = \frac{N \phi(I)}{I}$

Selbstinduktivität von Leiterschleifen: $u = i \cdot R + \frac{d\phi}{dt} = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt}$

Gegeninduktivität: $M = N_1 \frac{\phi_1(I_2)}{I_2}\Big|_{I_1=0} = N_2 \frac{\phi_2(I_1)}{I_1}\Big|_{I_2=0}$

Weitere Induktionsbeziehungen:

$$L = \frac{2 \cdot W_m}{I_2} = N^2 \cdot \Lambda$$

$$M = N_1 N_2 \cdot \Lambda = N_1 N_2 \frac{\mu \cdot A}{l} \qquad L'C' = \mu \cdot \varepsilon$$

Leitungstheorie

Leitungsgleichungen

$$U_1 = U_2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l} \right) \right] + I_2 \cdot Z_w \cdot \left[\frac{1}{2} \left(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l} \right) \right] = U_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l) + I_2 \cdot Z_w \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$I_1 = \frac{U_2}{Z_w} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l} \right) \right] + I_2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l} \right) \right] = \frac{U_2}{Z_w} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) + I_2 \cdot \cosh(\gamma \cdot l)$$

Wellenwiderstand:

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j(\omega \cdot L')}{G' + j(\omega \cdot C')}} \qquad |Z_w| = \sqrt[4]{\frac{R'^2 + (\omega \cdot L')^2}{G'^2 + (\omega \cdot C')^2}} \qquad \varphi_{Z_w} = \frac{1}{2} \cdot \left[\arctan\left(\frac{\omega \cdot L'}{R'} \right) - \arctan\left(\frac{\omega \cdot C'}{G'} \right) \right]$$

Eingangswiderstand:

$$Z_e = Z_w \cdot \frac{Z_a \cdot \cosh(\gamma \cdot l) + Z_w \cdot \sinh(\gamma \cdot l)}{Z_a \cdot \sinh(\gamma \cdot l) + Z_w \cdot \cosh(\gamma \cdot l)} = Z_w \cdot \frac{1 + r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}}{1 - r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v = f \cdot \lambda, \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\Rightarrow v = \frac{f \cdot 2\pi}{\beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot c_0$$

Ausbreitungskonstante:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j(\omega \cdot L')) \cdot (G' + j(\omega \cdot C'))} \qquad a = \alpha \cdot l \;;\; b = \beta \cdot l$$

Dämpfungskonstante:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R'G' - \omega^2 L'C' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 C'^2)}} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(R' \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \cdot \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

Phasenkonstante:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{-R'G' + \omega^2 L'C' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2) \cdot (G'^2 + \omega^2 C'^2)}}$$

Reflektionsfaktor:

$$r = \frac{U_a - I_a \cdot Z_w}{U_a + I_a \cdot Z_w} = \frac{Z_a - Z_w}{Z_a + Z_w}$$

$Z_a = Z_w \Rightarrow r = 0 \Rightarrow Z_e = Z_w$ (*Wellenanpassung* $: l \to \infty$)

$Z_a \to \infty \Rightarrow r = 1$ (*Leerlauf*)

$Z_a = 0 \Rightarrow r = -1$ (*Kurzschluss*)

Verlustfreie Leitung:

$$R' = 0, G' = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \qquad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \gamma = j\omega\sqrt{L'C'} \qquad \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Leerlaufende Leitung

$$Z_a \to \infty : Z_{el} = Z_w \cdot \frac{\cosh(\gamma \cdot l)}{\sinh(\gamma \cdot l)} = Z_w \cdot \coth(\gamma \cdot l)$$

verlustlose Leitung:

$\alpha = 0; \quad \gamma \cdot l = j(\beta \cdot l); \quad Z_w = reell$

$\Rightarrow Z_{el} = -j \cdot (Z_w \cdot \cot(\beta \cdot l))$

Leerlaufspannung:

$$\frac{\underline{\hat{u}}_0}{\underline{\hat{u}}_L} = \cosh(\gamma \cdot l) + \frac{Z_1}{Z_w} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) \Rightarrow \underline{\hat{u}}_L = \underline{\hat{u}}_0 \cdot \frac{(1 - r_1) \cdot e^{-\gamma \cdot l}}{1 - r_1 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}}$$

Kurzgeschlossene Leitung

$Z_a = 0 \Rightarrow Z_{ek} = Z_w \cdot \tanh(\gamma \cdot l)$

verlustlose Leitung

$\alpha = 0; \quad \gamma \cdot l = j(\beta \cdot l); \quad Z_w = reell$

$\Rightarrow Z_{ek} = j \cdot (Z_w \cdot \tan(\beta \cdot l))$

Spannungsübersetzungsverhältnis

$$\frac{\underline{\hat{u}}_0}{\underline{\hat{u}}_2} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cosh(\gamma \cdot l) + \left(\frac{Z_w}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_w}\right) \cdot \sinh(\gamma \cdot l)$$

$$\frac{2\underline{\hat{u}}_2}{\underline{\hat{u}}_0} = \frac{(1 - r_1) \cdot (1 + r_2)}{1 - r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}} \cdot e^{-\gamma \cdot l}$$

Spannung längs einer Leitung

$$\underline{\hat{u}}_x = \frac{1 + r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma(l-x)}}{(1 + r_2) \cdot e^{-\gamma\cdot(l-x)}} \cdot \underline{\hat{u}}_2 = \frac{\underline{\hat{u}}_0}{2} \cdot \frac{(1 - r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot(l-x)}}{1 - r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}} \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

Strom längs einer Leitung

$$\underline{\hat{i}}_x = \frac{\underline{\hat{i}}_0}{2} \cdot \frac{(1 + r_1) \cdot (1 - r_2) \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot(l-x)}}{1 - r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-2\cdot\gamma\cdot l}} \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

Leitungstransformatoren

Länge l	$\beta \cdot l$	Z_e	Spannung (verlustfrei)	Strom (verlustfrei)
$(2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$	$(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_w^2}{Z_a}$	$\underline{\hat{u}}_1 = -j \cdot Z_w \cdot \underline{\hat{i}}_2 \cdot (-1)^n$	$\underline{\hat{i}}_1 = j \cdot \frac{\underline{\hat{u}}_2}{Z_w} \cdot (-1)^n$
$n \cdot \frac{\lambda}{2}$	$n \cdot \pi$	Z_a	$\underline{\hat{u}}_1 = -\underline{\hat{u}}_2 \cdot (-1)^{n+1}$	$\underline{\hat{i}}_1 = \underline{\hat{i}}_2 \cdot (-1)^{n+1}$

Leitungsparameterbestimmung aus Kurzschluss und Leerlauf:

$$Z_w = \sqrt{Z_{el} \cdot Z_{ek}} \qquad \gamma \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{ek}}{Z_{el}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{ek}}{Z_{el}}}} \right)$$

Physikalische Formeln

Drehmoment

$$\sum \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \overset{\vec{r} \perp \vec{F}}{\Rightarrow} \sum M = r \cdot F$$

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Mathematische Hilfen

Flächen und Wege in Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta + r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{A} = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi z \cdot \vec{e}_r$$

Kugelkoordinaten:

$$d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{A} = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

Rechnen mit Vektoren

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = c \Rightarrow c = a \cdot b \cdot \cos\alpha$

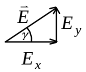
$(\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow c = 0)$

Kreuzprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = u \cdot v \cdot \sin\beta \cdot \vec{e}_{\text{Rechtehandregel}}$

Addition: $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{ges}$

1) Zerlegung in Komponenten:

$E_x = |\vec{E}| \cdot \cos\gamma; \; E_y = |\vec{E}| \cdot \sin\gamma$



2) Addition komponentenweise:

$$\left.\begin{array}{l} E_{ges,x} = E_{1x} + E_{2x} \\ E_{ges,y} = E_{1y} + E_{2y} \end{array}\right\} \vec{E}_{ges} = E_{ges,x} \cdot \vec{e}_x + E_{ges,y} \cdot \vec{e}_y$$

$$|\vec{E}_{ges}| = \sqrt{E_{ges,x}^2 + E_{ges,y}^2}$$

Kreis:

$U = 2 \cdot \pi \cdot r \qquad A = \pi \cdot r^2$

Kugel:

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \qquad V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Zylinder:

$A_M = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \qquad V = \pi \cdot \rho^2 \cdot l$

Cramersche Regel:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Hyberbolicusfunktion

$\cosh(jx) = \cos x \qquad \sinh(jx) = j \cdot \sin x$

$\cosh x = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \qquad \sinh x = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$

Differentiations- und Integratinsregeln

Produktregel: $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$

$(u \cdot v \cdot w)' = u'v \cdot w + u \cdot v'w + u \cdot v \cdot w'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - v'u}{v^2}$

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Partielle Integration: $\int u'v \cdot dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$

Substitution: $\int f(g(x)) \cdot dx = \int f(g(x)) \cdot \frac{1}{g'(x)} dx$

Winkel in Abhängigkeit von der Zeit: $\alpha(t) = \omega \cdot t + \alpha_0$

$\int x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \qquad \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x \qquad \int \frac{1}{x+a} \cdot dx = -\frac{1}{x+a} \qquad \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n \qquad \int -\frac{n}{x^{n+1}} \cdot dx = \frac{1}{x^n} \qquad \int e^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$

	0 $0°$	$\frac{1}{6}\pi$ $30°$	$\frac{1}{4}\pi$ $45°$	$\frac{1}{3}\pi$ $60°$	$\frac{1}{2}\pi$ $90°$	$\frac{2}{3}\pi$ $120°$	$\frac{3}{4}\pi$ $135°$	$\frac{5}{6}\pi$ $150°$	π $180°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0