

Mathematische Zusammenhänge

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \quad \sum_{n=0}^k x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$e^{-jk\pi} = e^{jk\pi} = (-1)^k$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}[1 + \cos 2\alpha] \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}[1 - \cos 2\alpha] \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pratialbruchzerlegung (Pol 2. Ordnung):

$$X(p) = \frac{A}{(p-p_0)^2} + \frac{B}{p-p_0} + \frac{C}{p-p_1}$$

$$A = [(p-p_0)^2 \cdot X(p)]_{p=p_0} \quad B = \left[\frac{d}{dt} (p-p_0)^2 \cdot X(p) \right]_{p=p_0} \quad C = [(p-p_1) \cdot X(p)]_{p=p_1}$$

alternativ: $\lim_{p \rightarrow 0} X(p) = 0$ aufstellen und nach B auflösen

Komplexe Wurzeln:

$$z^n = a \rightarrow z_i = \sqrt[n]{a} e^{j \frac{\varphi + 2\pi \cdot i}{n}}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Energie

$$W(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \int_0^t i^2(\tau) \cdot R d\tau$$

Einspeichernetzwerke mit Gleichanregung:

$$x(t) = x(t_1^+) \cdot e^{-\frac{t-t_1}{T}} + x(\infty) \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T}} \right) \quad T = R_i C \text{ oder } T = \frac{L}{R_i}$$

Fourier-Reihen

Effektivwert:

allgemeine Definition $F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}$

komplexe Fourierreihe $F = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{-k} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2}$

reelle normale Fourierreihe $F = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}}$

Symmetrien

$f(t)$ ist eine gerade Funktion, d.h. $f(t) = f(-t)$: $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k \omega_0 t) dt$; $b_k = 0$

$f(t)$ ist eine ungerade Funktion, d.h. $f(t) = -f(-t)$: $a_k = 0$; $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k \omega_0 t) dt$

$f(t + T/2) = -f(t) \Rightarrow a_{2k} = b_{2k} = 0$; $a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos((2k+1)\omega_0 t) dt$

$b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin((2k+1)\omega_0 t) dt$

$f(t)$ ist ungerade und $f(t + T/2) = -f(t)$: $a_k = b_{2k} = 0$; $b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin((2k+1)\omega_0 t) dt$

$f(t)$ ist gerade und $f(t + T/2) = -f(t)$: $a_{2k} = b_k = 0$; $a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos((2k+1)\omega_0 t) dt$

$f(t)$ periodisch zu $T/2$: $\Rightarrow a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$
 ungerade bezügl. $T/8$: $a_4 k = 0$

Fourier-Transformation

äquivalente Summendarstellungen:

Zeitbereich:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

Frequenzbereich:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_0} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Faltung im Frequenzbereich:

$$F(j\omega) * G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\lambda) \cdot G(j(\omega - \lambda)) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\lambda) \cdot F(j(\omega - \lambda)) d\lambda$$

Ausblendeigenschaften:

$$F(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\lambda) \cdot \delta(\omega - \omega_0 - \lambda) d\lambda = F(j(\omega - \omega_0))$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0)$$

1. Lange Pulse im Zeitbereich, erzeugen ein schmaleres Spektrum als kurze Pulse.
2. Ist der Rechteckpuls zentral zu $t=0 \Rightarrow$ Phase konstant, Sprünge durch neg Werte von $si(x)$.
3. zwei aufeinanderfolgende Rechteckpulse \Rightarrow Betragsspektrum mit Oberschwingung, Phase ist konstant (Sprünge wie 2)
4. zeitverschobener Rechteckpuls \Rightarrow keine Verschiebung im Betragsspektrum, lineare Phase

DFT:

Analysegleichung: $X_{DFT}(n) = X(jn\Delta\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$; $n=0,1,2,\dots,N-1$

Synthesegleichung: $x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_{DFT}(n) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$; $k=0,1,2,\dots,N-1$ $\Delta\Omega = 2\frac{\pi}{N}$

Faltung: $w_p(n) = x_p(n) * v_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_p(k) \cdot v_p(n-k)$

DTFT:

Analysegleichung: $X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot e^{-j\Omega kT}$

Synthesegleichung: $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) \cdot e^{jn\Omega} d\Omega$

Faltung: $w(n) = x(n) * v(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot v(n-k)$

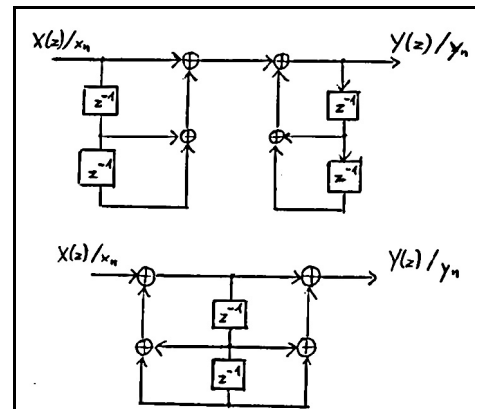
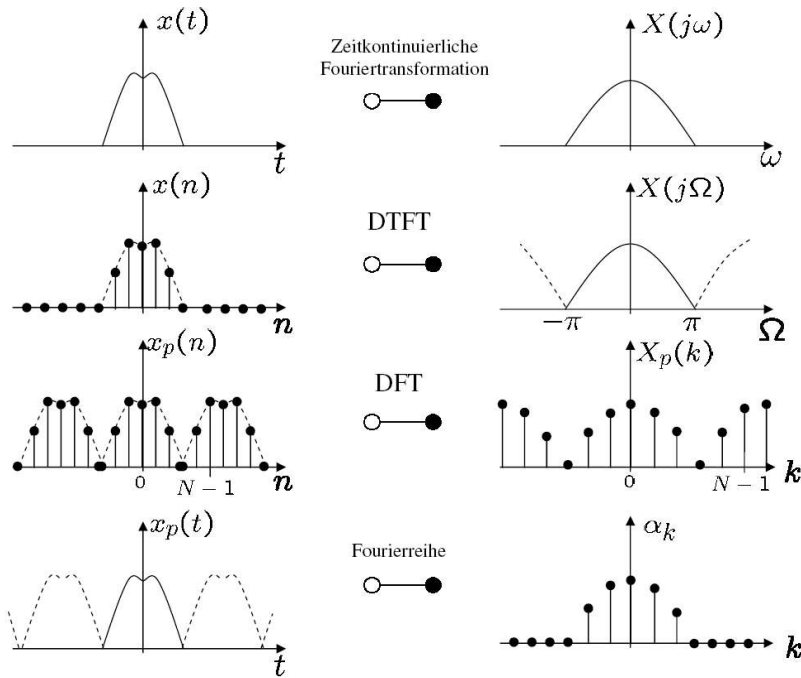


Abb. 1: Direktform 1 und 2

Z-Transformation

Polstellen liegen nicht im Konvergenzbereich!

$|z - a| > 0$ für alle Polstellen; Konvergenzbereich ist der Bereich in dem sich alle überlappen.
oder $|az^{-1}| < 1$

Rücktransformation:

$X(z) = \frac{z(z^{n-1} + \dots)}{z^n + \dots}$ oder keine Verschiebung bei $x_n \rightarrow$ Partialbruchzerlegung von $\frac{X(z)}{z}$

$X(z) = \frac{z^{n-1} + \dots}{z^n + \dots} \rightarrow$ nach Partialbruchzerlegung mit z erweitern

Faltung kausaler Systeme:

$y_n = \left(\sum_{k=0}^n h_k \cdot x_{n-k} \right) s_n$

Kausales System:

Verzög. von $x_k \leq$ Verzög. von y_k

Residuensatz der z-Transformation:

$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz = \sum Res[F(z) z^{n-1}, z_i]$

einfacher Pol: $Res[F(z) z^{n-1}, z_i] = [(z - z_i) F(z) z^{n-1}]_{z=z_i}$

k-facher Pol: $Res[F(z) z^{n-1}, z_i] = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_i)^k F(z) z^{n-1}]_{z=z_i}$

Laplace Repräsentationen

Circuit element	t-Domain	p-Domain
Voltage source		
Current source		
Resistance		
Inductance		
Capacitance		

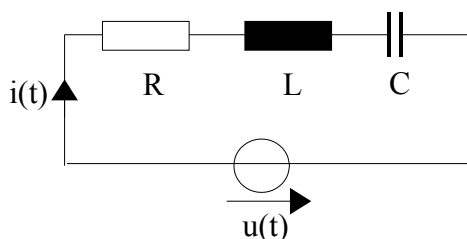
Laplace Transformation

Theorem:

$$(-t)^n f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

Ladung:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



$$u = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau) d\tau + u_c(0^-)$$

eingeschwungener Zustand (Gleichspannung):
 $i_c(0^-) = 0 \rightarrow C$ abtrennen $\rightarrow u_c(0^-) = \dots$
 $u_L(0^-) = 0 \rightarrow L$ kurzschließen $\rightarrow i_L(0^-) = \dots$